

Revisión: Constant of motion, Lagrangian and Hamiltonian of the gravitational attraction of two bodies with variable mass.

Dunia Blanco*, William A. Romero R.**

Departamento de Física
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia

Resumen

Se presenta una revisión del artículo *Constant of motion, Lagrangian and Hamiltonian of the gravitational attraction of two bodies with variable mass* de Gustavo López. Realizando una explicación más profunda de los conceptos físicos y presentando detalles adicionales en el desarrollo matemático presentado en el artículo original.

1. Introducción

El sistema sobre el cual se plantea el problema, consiste en dos cuerpos de masa m_1 y m_2 tal que $m_2 \ll m_1$ que interactúan únicamente por la fuerza de atracción gravitacional; en donde m_2 presenta una pérdida de masa con respecto al tiempo. Este planteamiento es análogo al sistema conformado por un cometa que se acerca a una estrella con un cambio de masa en su movimiento.

El propósito de este análisis es deducir las expresiones que determinan el movimiento del sistema en términos del Lagrangiano y Hamiltoniano, teniendo en cuenta la variación de la masa de uno de los cuerpos. De esta manera se presenta la diferencia entre la trayectoria que describe el movimiento con respecto a la posición y la velocidad; y la posición y el momento.

2. Conceptos preliminares

En primera instancia se presenta una breve descripción de los conceptos teóricos esenciales que permitirán modelar el problema con sus características físicas, al igual que un entendimiento claro del análisis y resultados obtenidos por el autor.

2.1. Marco de referencia del sistema y ecuaciones de movimiento

El movimiento con aceleración constante de un cuerpo es consecuencia de la acción de una fuerza sobre éste. La interacción entre dos cuerpos de masa m_1 y m_2 respectivamente, se rige por la ley de gravitación universal:

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{|r_2 - r_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (1)$$

Sea r_i el vector posición con coordenadas (x_i, y_i, z_i) en un sistema de referencia inercial arbitrario; entonces la distancia entre los cuerpos se expresa, en términos de sus vectores posición como:

$$|r_1 - r_2| = |r_2 - r_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (2)$$

Si se define $\mathbf{r} = |r_2 - r_1|$, entonces la ecuación (1) puede ser escrita:

* du-blanc@uniandes.edu.co

** wil-rome@uniandes.edu.co

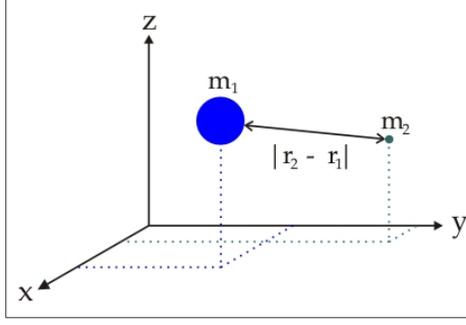


Figura 1:

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \quad (3)$$

Ésto con el propósito de simplificar las coordenadas a manipular. El centro de masa se define:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

en términos de los vectores r_1, r_2 .

En el caso particular del sistema propuesto, se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento del sistema:

$$\frac{d}{dt} \left(m_1 \frac{dr_1}{dt} \right) = - \frac{G m_1 m_2}{|r_1 - r_2|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(m_2 \frac{dr_2}{dt} \right) = - \frac{G m_1 m_2}{|r_2 - r_1|^3} (r_2 - r_1) \quad (6)$$

Como consideramos que m_2 varia con respecto al tiempo la ecuación (6) se reescribe:

$$m_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} = - \frac{G m_1 m_2}{|r_2 - r_1|^3} (r_2 - r_1) - \dot{m}_2 \frac{dr_2}{dt} \quad (7)$$

Reescribiendo las ecuaciones de la forma de la ecuación (3), desarrollando $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$ y $\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2}$ se obtienen:

$$\ddot{\mathbf{r}} = - \frac{(m_1 + m_2)G}{r^3} \mathbf{r} - \frac{\dot{m}_2}{m_2} \dot{r}_2 \quad (8)$$

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{-\dot{m}_2}{m_1 + m_2} \dot{r}_2 + \frac{2m_2 \dot{m}_2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{r} + \frac{(m_1 + m_2)m_1 \ddot{m}_2 - 2m_1 \dot{m}_2^2}{(m_1 + m_2)^3} \mathbf{r} \quad (9)$$

Note que este sistema de ecuaciones está acoplado en términos de \mathbf{r} y \mathbf{R} . Razón por la cual no es muy práctica su utilización teniendo en cuenta que m_2 varia con respecto al tiempo. Dado que $m_2 \ll m_1$ se puede considerar que el centro de masa del sistema se encuentra en m_1 , en consecuencia $r_1 = 0$ y la única ecuación que describe el movimiento del sistema es:

$$m_2 \frac{d^2 r}{dt^2} = - \frac{G m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} - \dot{m}_2 \dot{\mathbf{r}} \quad (10)$$

2.2. Lagrangiano y Hamiltoniano

Debe tenerse en cuenta que la deducción del Lagrangiano permitirá conocer el comportamiento del movimiento en términos de características propias del sistema como la posición y la velocidad, no por la acción de fuerzas externas. De igual forma el Hamiltoniano permitirá conocer el comportamiento del movimiento en términos de la posición y el momento de los cuerpos.

Sea $T(\dot{q}_j)$ la energía cinética y $U(q_j)$ entonces el Lagrangiano L se define:

$$L \equiv T - U = L(q_j, \dot{q}_j) \quad (11)$$

en donde q_j son las coordenadas generalizadas y \dot{q}_j la derivada con respecto al tiempo.[2] Las ecuaciones de movimiento de Lagrange estan dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (12)$$

El Hamiltoniano se define como:

$$H(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \dot{q}_j p_j - L(q_j, \dot{q}_j, t) \quad (13)$$

donde p_j es el momento generalizado.

Si L es una suma de funciones homogeneas, con velocidades generalizadas de grados 0,1 y 2 y si las ecuaciones son definidas por coordenadas generalizadas las cuales no esta en funcion del tiempo entonces:

$$H = T + V = E \quad (14)$$

y E es la energía total. [4]

3. Planteamiento del problema

Para efectos del siguiente desarrollo se emplearán coordenadas esféricas que facilitarán la manipulación matemática del problema (ver Apendice A).

Como se explico anteriormente, la ecuación (10) describe el movimiento del sistema; en coordenadas esféricas:

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \left(\frac{Gm_1 m_2}{r^2} + \dot{m}_2 \dot{r} \right) \hat{r} + \dot{m}_2 (r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \dot{\varphi} \sin \theta \hat{\varphi}) \quad (15)$$

Dado que $\mathbf{r} = r \hat{r}$, puede escribirse de igual manera la aceleración en términos de dichas coordenadas:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 + r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \hat{r} + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} + r \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta) \hat{\theta} + (2\dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta) \hat{\varphi} \quad (16)$$

utilizando (15) e igualando \hat{r} , $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$; se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$m_2 (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 + r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) = - \frac{Gm_1 m_2}{r^2} - \dot{m}_2 \dot{r} \quad (17)$$

$$m_2 (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} + r \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta) = \dot{m}_2 r \dot{\theta} \quad (18)$$

$$m_2 (2\dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta) = \dot{m}_2 r \dot{\varphi} \sin \theta \quad (19)$$

Estas ecuaciones conforman un sistema acoplado para \dot{m}_2 . Sin embargo, se puede restringir asumiendo que $\dot{m}_2 r \approx 0$, donde $\dot{\varphi} = 0$, y en consecuencia el sistema se redefine:

$$m_2 (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = - \frac{Gm_1 m_2}{r^2} - \dot{m}_2 \dot{r} \quad (20)$$

y

$$m_2 (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) = 0 \quad (21)$$

Sea m_0 la masa de m_2 cuando se encuentra a una distancia muy grande de m_1 ; entonces, en este caso m_2 es constante y $\dot{m}_2 \neq 0$. Con lo anterior, en la ecuación (21) el segundo factor tiene que ser 0 para que se cumpla la igualdad. Multiplicando esta ecuación por $m_0 r$, se obtendrá una constante del movimiento dada por:

$$P_\theta = m_0 r^2 \dot{\theta} \quad (22)$$

la cual podemos comparar como el momento angular en coordenadas esféricas. Reemplazando esta constante de movimiento en (20):

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{r^2} + \frac{P_\theta^2}{m_0^2 r^3} - \frac{m_2}{m_2} \left(\frac{dr}{dt} \right) \quad (23)$$

Suponiendo que m_2 es una función en términos de la distancia que existe entre los cuerpos, $m_2 = m_2(r)$, se tiene que:

$$\frac{dm_2}{dt} = \frac{dm_2}{dr} \frac{dr}{dt} \quad (24)$$

y la ecuación (23) puede ser escrita:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{r^2} + \frac{P_\theta^2}{m_0^2 r^3} - \frac{m'_2}{m_2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \quad (25)$$

donde $m'_2 = \frac{dm_2}{dr}$. Haciendo una reducción de orden $\frac{dr}{dt} = v$, se puede observar esta ecuación como un sistema autónomo:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{Gm_1}{r^2} + \frac{P_\theta^2}{m_0^2 r^3} - \frac{m'_2}{m_2} v^2 \quad (26)$$

Con lo anterior, se puede definir una constante de movimiento $K = K(r, v)$, tal que $\frac{K(r, v)}{dt} = 0$:

$$\frac{dK}{dt} = v \frac{\partial K}{\partial r} + \left(-\frac{Gm_1}{r^2} + \frac{P_\theta^2}{m_0^2 r^3} - \frac{m'_2}{m_2} v^2 \right) \frac{\partial K}{\partial v} = 0 \quad (27)$$

Esta ecuación diferencial parcial, cuya curva característica es:

$$C(r, v) = m_2^2(r) v^2 + 2Gm_1 \int \frac{m_2^2(r) dr}{r^2} - \frac{2P_\theta^2}{m_0^2} \int \frac{m_2^2(r) dr}{r^3} \quad (28)$$

tiene como solución:

$$K(r, v) = F(C(r, v)) \quad (29)$$

donde F es una función arbitraria de la curva. El objetivo es asociar la ecuación constante de movimiento con la conservación de la energía. Para este fin, definimos $F = \frac{C}{2m_0}$, para que de esta manera adquiera dimensionalidad de energía, entonces:

$$K(r, v) = \frac{m_2^2(r)}{2m_0} v^2 + \frac{Gm_1}{m_0} \int \frac{m_2^2(r) dr}{r^2} - \frac{P_\theta^2}{m_0^3} \int \frac{m_2^2(r) dr}{r^3} \quad (30)$$

Mediante análisis dimensional de (30), se pueden relacionar la energía cinética y la energía potencial efectiva del sistema como:

$$T(v) = \frac{m_2^2(r)}{2m_0} v^2 \quad (31)$$

y

$$V_{eff} = \frac{Gm_1}{m_0} \int \frac{m_2^2(r) dr}{r^2} - \frac{P_\theta^2}{m_0^3} \int \frac{m_2^2(r) dr}{r^3} \quad (32)$$

respectivamente.

Ahora, es posible encontrar el Lagrangiano; es cual se define en (11); en este caso particular $q_j = r$ y $\dot{q}_j = v$, y así:

$$L(r, v) = \frac{m_2^2(r)}{2m_0} v^2 - \frac{Gm_1}{m_0} \int \frac{m_2^2(r) dr}{r^2} + \frac{P_\theta^2}{m_0^3} \int \frac{m_2^2(r) dr}{r^3} \quad (33)$$

a partir de la cual podemos deducir el momento generalizado ($p = \frac{\partial L}{\partial v}$):

$$p = \frac{m_o p^2}{2m_2^2(r)} \quad (34)$$

y el Hamiltoniano, el cual se define en 13:

$$H(r, p) = \frac{m_o p^2}{2m_2^2(r)} + \frac{Gm_1}{m_o} \int \frac{m_2^2(r) dr}{r^2} - \frac{P_\theta^2}{m_o^3} \int \frac{m_2^2(r) dr}{r^3} \quad (35)$$

Por la definición de (32), es posible escribir la ecuación de constante de movimiento y el Hamiltoniano como:

$$K(r, v) = \frac{m_2^2(r)}{2m_o} v^2 + V_{eff}(r) \quad (36)$$

y

$$H(r, p) = \frac{m_o p^2}{2m_2^2(r)} + V_{eff}(r) \quad (37)$$

Este potencial efectivo tiene un valor extremo en el punto:

$$r^* = \frac{P_\theta^2}{Gm_1 m_o^2} \quad (38)$$

el cual depende de m_o y no depende de $m_2(r)$. Se puede determinar que dicho valor extremo es un mínimo porque:

$$\left(\frac{d^2 V_{eff}}{dr^2} \right)_{r=r^*} = \frac{(Gm_1 m_o)^4 m_o m_2^2(r^*)}{P_\theta^6} > 0 \quad (39)$$

Apartir de este resultado se puede encontrar la trayectoria $r(\theta)$, usando la relación $\frac{dr}{dt} = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)\dot{\theta}$ y la ecuación (22) en (36) para obtener

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \frac{P_\theta}{\sqrt{2m_o^3}} \int_{r_0}^r \frac{m_2(r) dr}{r^2 \sqrt{K - V_{eff}(r)}} \quad (40)$$

en donde K y P_θ se determinan por las condiciones iniciales: $K = K(r_0, v_0)$ y $P_\theta = m_o r_0^2 \dot{\theta}_0$. El tiempo de la mitad de un ciclo de oscilación, $T_{\frac{1}{2}}$ es obtenido directamente de (36) y es:

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2m_o}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{m_2(r) dr}{\sqrt{K - V_{eff}(r)}} \quad (41)$$

donde r_1 r_2 son dos puntos de retorno deducidos a partir de la solución de:

$$V_{eff}(r_i) = K \quad (42)$$

4. Modelo de masa variable

El autor propone como una posible aplicación del planteamiento anterior; por ejemplo, considerar que m_2 pierde materia como en el caso de un cometa al interactuar con el viento estelar; entonces, para un ciclo de oscilación se propone:

$$m_2(r) = \begin{cases} m_{o0} \sqrt{1 - e^{-\alpha r}} & \text{entrante para } v < 0 \\ m_i e^{\alpha(r_1 - r)} + m_f (1 - e^{-\alpha r}) & \text{saliente para } v > 0 \end{cases} \quad (43)$$

Donde m_o o m_f es la masa del cometa cuando se encuentra a una distancia muy grande de la estrella de masa m_1 ; por simetría $m_f = 2m_i - m_{o0}$. En ambos casos m_i es la masa del cometa acercandose a la estrella, una distancia r_1 , $m_i = m_{o0} \sqrt{1 - e^{-\alpha r_1}}$. Finalmente α es un factor obtenido de los datos experimentales [1].

El potencial efectivo (32) en el caso $m_o = m_{o0}$ ($v < 0$):

$$\begin{aligned}
V_{eff}^{(in)}(r) = & -\frac{Gm_1m_{00}}{r}(1 - e^{-\alpha r}) + \frac{P_\theta^2}{2m_{00}r^2}(1 - e^{-\alpha r}) \\
& + \left(GM_1m_{00}\alpha + \frac{\alpha^2 P_\theta^2}{2m_{00}} \right) E_i(-\alpha r) + \frac{\alpha P_\theta^2 e^{-\alpha r}}{2m_{00}r}
\end{aligned} \tag{44}$$

El potencial efectivo 32 en el caso $m_0 = m_f$ ($v > 0$):

$$\begin{aligned}
V_{eff}^{(in)}(r) = & -\frac{Gm_1m_f}{r} + \frac{\tilde{P}_\theta^2}{2m_f r^2} + \frac{Gm_1(m_i e^{\alpha r_1} - m_f)^2}{m_f} \left(-\frac{e^{-2\alpha r}}{r} - 2\alpha E_i(-2\alpha r) \right) \\
& - \frac{\tilde{P}_\theta^2(m_i e^{\alpha r_1} - m_f)^2}{m_f^3} \left(-\frac{e^{-2\alpha r}}{2r^2} + \frac{\alpha e^{-2\alpha r}}{r} + 2\alpha E_i(-2\alpha r) \right) \\
& + 2Gm_1(m_i e^{\alpha r_1} - m_f) \left(-\frac{e^{-\alpha r}}{r} - \alpha E_i(-\alpha r) \right) \\
& - \frac{2\tilde{P}_\theta^2(m_i e^{\alpha r_1} - m_f)}{m_f^2} \left(-\frac{e^{-2\alpha r}}{2r^2} + \frac{\alpha e^{-2\alpha r}}{r} + \frac{\alpha^2}{2} \alpha E_i(-\alpha r) \right)
\end{aligned} \tag{45}$$

Para $\tilde{P}_\theta = m_f r^2 \dot{\theta}$. El punto extremo del potencial efectivo para cada caso es:

$$r_{in}^* = \frac{P_\theta^2}{Gm_1m_{00}^2} \quad r_{out}^* = \frac{P_\theta^2}{Gm_1m_f^2} \tag{46}$$

Con la propuesta realizada en 43, la constante de movimiento, el Lagrangiano, el momento lineal generalizado y el Hamiltoniano son:

$$K^{(i)}(r, v) = \frac{m_2^2(r)}{2m_0} v^2 + V_{eff}^{(i)}(r) \tag{47}$$

$$L^{(i)}(r, v) = \frac{m_2^2(r)}{2m_0} v^2 - V_{eff}^{(i)}(r) \tag{48}$$

$$p^{(i)}(r, v) = \frac{m_2^2(r)}{m_0} v \tag{49}$$

$$H^{(i)}(r, p) = \frac{m_0 p^2}{2m_2^2(r)} + V_{eff}^{(in)}(r) \tag{50}$$

Para $i=in$ para el caso entrante e $i=out$ para el caso saliente.

5. Resultados y conclusiones

De los resultados más interesantes del artículo, es el análisis gráfico del potencial efectivo para ciertos valores de α . Igualmente la comparación de las trayectorias en los planos (r, v) y (r, p) . Consideramos que reproducir estas gráficas, no es una aporte significativo a su entendimiento, así que con este artículo anexamos una copia de las gráficas originales. A continuación se explicará su significado.

En la formulación y desarrollo de la problemática planteada se deducen expresiones en concordancia con la física de una fuerza central: una energía cinética sumada a una energía potencial efectiva en términos del momento.

Al graficar las trayectorias en los planos (r, v) y (r, p) puede observarse que éstas no coinciden; dado que el momento generalizado 34 depende directamente de m_2 , esta relación no se presenta con la velocidad. Razón por la cual se encuentra dicha diferencia en las trayectorias. Notese también que la constante de movimiento, únicamente depende las características propias del sistema: masa, velocidad y momento, independiente del tiempo.

Referencias

- [1] G. López *Constant of motion, Lagrangian and Hamiltonian of the gravitational attraction of two bodies with variable mass*. 2005.
- [2] Marion Jerry B., Steven T. Thornton *Classical Dynamics of particles and systems* 5a. Edición, 2004.
- [3] Stewart J. *Calculus, Early Transcendentals* 3a. Edición, 1995.
- [4] *Hamiltonian Mechanics*. Enlace disponible: <http://scienceworld.wolfram.com/physics/Hamiltonian.html>

Apendice A

Coordenadas esféricas

Sea $r = (x, y, z)$ un vector como se muestra en la figura 2, θ el ángulo entre el eje z y φ el ángulo entre el eje x y la proyección de r sobre el plano xy . Expresando (x, y, z) en términos de (r, θ, φ) , se obtiene:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad (51)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \quad (52)$$

$$z = r \cos \theta \quad (53)$$

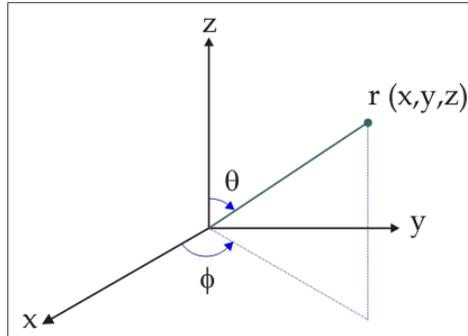


Figura 2:

Se definen $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ como los vectores unitarios del nuevo sistema de coordenadas; se pueden deducir las siguientes expresiones:

$$\hat{r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \varphi \cos \theta) \quad (54)$$

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{\varphi} \sin \theta \hat{\varphi} \quad (55)$$

$$\hat{\theta} = (\cos \theta \cos \varphi, \sin \varphi \cos \theta, -\sin \theta) \quad (56)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta} \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta} \quad (57)$$

$$\hat{\varphi} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \quad (58)$$

$$\dot{\hat{\varphi}} = \sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta} \quad (59)$$